29. Scaling and CAM Theory in Far-From-Equilibribrium Systems

東大・理　鈴 木 増 雄

§ 1. はじめに

まずはじめに最近筆者の提唱した協力現象の一般論である「コヒーレント異常法(Coherent Anomaly Method, 略してCAM)」[1]の要点を解説し，その後で，臨界現象および非平衡系への応用[2)-7)]について述べる。特に，スピングラスやパーコレーションへの最初の簡単な応用例を説明する。

協力現象を扱う最も簡単な方法は，ワイス近似[8]である。この近似では，無限個の原子やスピンの効果を1個の原子やスピンに働く有効場で置き換え，それを閉じた形に決める。したがって，ワイス近似では，ゆらぎの効果は入らず，非線形の分岐の効果だけが入る。その結果，古典的な臨界指数で記述される異常性が現れる。非古典的なフラクショナルな臨界指数を求めるには，ウィルソンのくり込み群の理論のように，何らかの方法でゆらぎをとり入れなければならない。そういう方向への最初の試みは，ベーテ[9]によって行われた。ベーテ近似では，小さなクラスターのまわりの無限個の粒子(またはスピン)の効果は有効場で置きかえるが，クラスターの中は統計力学的に厳密に計算し，ゆらぎの効果をとり入れる。このベーテ近似の相転移$T_c^{(\mathrm{Bethe})}$は，ワイスの平均場近似で求めた相転移点$T_c^{(\mathrm{mf})}$より低く，真の値T_c^*に少し近づく。しかし，帯磁率χ_0のような応答関数の異常性は，依然としてワイス近似の結果と同じくキュリー・ワイス則

$$\chi_0 \simeq \frac{\bar{\chi}}{\varepsilon};\quad \varepsilon = \frac{T-T_c}{T_c} \tag{1.1}$$

に従う。このために，どんなにクラスターを大きくしても，相転移点T_cは少しずつ改良されるが，臨界指数は古典的な値しか得られない近似として，クラスター平均場近似は長い間見捨てられていた。ところが，(1.1)の古典的な発散の係数$\bar{\chi}$に着目してみると，それはクラスターのサイズLを大きくして近似の度合をあげるにつれてコヒーレントに(系統的に)異常に大きくなることに気付いて,[1] それを「コヒーレント異常」と名づけた。[1] 近似の度合を$T_c - T_c^*$を用いて表わすと，

$$\bar{\chi}(T_c) \sim (T_c - T_c^*)^{-\phi} \tag{1.2}$$

となり，いくつかの近似を系統的に適用して $\bar{\chi}(T_c)$ を T_c の関数としてプロットして，ϕ を評価してやると，次式で定義される χ の真の臨界指数 γ は

$$\chi \sim \frac{1}{(T-T_c)^{\gamma}}\ ; \quad \gamma = 1+\phi \tag{1.3}$$

となる。[1)~7)] このように，コヒーレント異常を調べることによって，真の臨界指数を精度よく評価することができる。

§ 2. スピングラスのCAM理論

スピングラスの相転移を特徴づける物理量は，非線形帯磁率 χ_2 である。[10)] それは，次のように定義される。[10)] すなわち，磁化 m を磁場 H で展開すると，

$$m = \chi_0 H + \chi_2 H^3 + \cdots \tag{2.1}$$

となる。このとき，非線形帯磁率は， Edwards-Anderson の応答関数[11)] χ_{EA} に比例して負に発散する。[10)]

$$\chi_2 \sim -\chi_{EA} \sim -\frac{1}{(T-T_{sg}^*)^{\gamma_s}} \tag{2.2}$$

スピングラス相転移は，くり込み群の理論によると4次元以下では起らないとされていた。しかし，最近のモンテカルロ・シミュレーション[12)-14)]によると， 3次元で相転移が起り，その転移温度 T_{sg} は $T_{sg} \simeq 1.2\ J/k_B$ と見積られている。また， γ_s の値は， $\gamma_s \simeq 2.9$ と報告されている。高温展開法によっても同様の結果が報告されている。[15),16)]

CAM理論をスピングラスに応用するには， T_{sg}^* として，上の値を用いるとしても，少なくとも2つのクラスター平均場近似が必要である。ここでは，ワイスの平均場近似と藤木ー桂のペア近似の結果を組み合わせて，スピングラスの非線形帯磁率の臨界指数 γ_s を評価してみる。

よく知られているように，平均場近似による $\chi_{sg}^{(mf)}$ は，

$$\chi_{sg}^{(mf)} \simeq -\frac{\mu_B^4}{2zJ^2}\cdot\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{\bar{\chi}_{sg}^{(mf)}}{\varepsilon} \tag{2.3}$$

となる。[10),17)] 但し， z は最近接格子点の数を表わし

$$\varepsilon = \frac{T - T_{sg}^{(mf)}}{T_{sg}^{(mf)}} \; ; \quad T_{sg}^{(mf)} = z^{1/2}\, J/k_B \, . \tag{2.4}$$

同様に藤木ー桂[18]のペア近似の結果を整理して，我々のコヒーレント異常が見えるようにスケルトン化すると，

$$\chi_{sg}^{(pair)} \simeq - \frac{\mu_B^4}{(k_B T_{sg})^2} \cdot \frac{z/(z-1)}{1-(z-1)\tanh^2(J/k_B T)} \simeq - \frac{\overline{\chi}^{(pair)}}{\varepsilon} ;$$
$$\overline{\chi}^{(pair)} = \frac{\mu_B^4}{J^2} \, \frac{z}{2(z-2)(z-1)^{1/2}} (\tanh^{-1}(z-1)^{-1/2}) \tag{2.5}$$

となる。これらの解析的な表式で，$z=6$ とおくと，

$$\overline{\chi}_{sg}^{(mf)} = 0.083333 \quad \cdots ; \quad k_B T_{sg}^{(mf)}/J = 2.4495 \, , \tag{2.6}$$

および

$$\overline{\chi}_{sg}^{(pair)} = 0.16141 \quad \cdots ; \quad k_B T_{sg}^{(pair)}/J = 2.0780 \cdots , \tag{2.7}$$

となり，$T_{sg}^{*} \simeq 1.2\, J/k_B$ を用いると，CAMの理論より，

$$r_{sg} = 1 + \frac{\log \overline{\chi}^{(pair)}/\overline{\chi}^{(mf)}}{\log \delta T_{sg}^{(mf)}/\log \delta T_{sg}^{(pair)}} = 1 + 1.874 \simeq 2.87 \, . \tag{2.8}$$

但し，$\delta T_{sg} = T_{sg} - T_{sg}^{*}$。Ogielski 達の数値計算の結果 $r_{sg} \simeq 2.9$と比較すると，大変良く一致している。本当に良い精度の結果を得るためには，もっと大きなクラスターを系統的に研究しなければならない。それについては別に近く報告する。

§3. パーコレーションのCAM理論

次にパーコレーションの問題を考える。この問題は，格子のボンドを確率pで浸透（パーコレート）させるか，格子点を確率pで浸透させるかによって2通りある。それぞれボンド（またはサイト）パーコレーションと呼ぶ。大きさsのクラスターの数を全格子点数Nで割ったものを n_s として，次のような物理量を定義する：

$$P(p)=\frac{1}{N}\sum_{s} s\,n_s \sim (p-p_c)^{\beta_p},$$
$$S(p)=\frac{1}{Np}\sum_{s} s^2 n_s \sim |p-p_c|^{-\gamma_p} \quad . \tag{3.1}$$

これらをCAM理論を用いて研究するには，一般論[1)]にしたがって，適当な「クラスター平均場近似」（パーコレーションの問題では，これらの近似法は自明ではない）により，

$$\begin{cases} P(p)\simeq \overline{P}(p_c)(p-p_c), \\ S(p)\simeq \overline{S}(p_c)/(p_c-p) \end{cases} \tag{3.2}$$

のように，平均場臨界係数 $\overline{P}(p_c)$，$\overline{S}(p_c)$ を求め，その p_c 依存性

$$\overline{P}(p_c) \sim (p_c^*-p_c)^{-\phi_\beta},$$
$$\overline{S}(p_c) \sim (p_c^*-p_c)^{-\phi_\gamma} \tag{3.3}$$

を評価する。これらのコヒーレント臨界指数 ϕ_β および ϕ_γ が求まると，CAMの一般論[1)]により

$$\beta_p = 1-\phi_\beta, \quad \gamma_p = 1+\phi_\gamma \tag{3.4}$$

のようにして，パーコレーションの臨界指数 β_p，γ_p 等が求められる。他の臨界指数についても同様である。

ここでは，もっとも簡単な平均場近似（最近接格子点の数 z が $z\to\infty$ の漸近解）とベーテ近似（ベーテ格子の解）についてコヒーレント異常を調べる。その結果は次の通りである。（ここまでの近似では，ボンドパーコレーションでもサイトパーコレーションでも同じである。しかし，p_c が異なるので，臨界指数は異なる結果が得られて大変都合がよい。）

a）平均場近似のパーコレーション

$$P^{(\mathrm{mf})}(p)=\overline{P}^{(\mathrm{mf})}(p-p_c)\ ;\ \overline{P}^{(\mathrm{mf})}=2z,$$
$$S^{(\mathrm{mf})}=\overline{S}^{(\mathrm{mf})}/(p_c-p)\ ;\ \overline{S}^{(\mathrm{mf})}=1/z,$$
$$p_c^{(\mathrm{mf})}=1/z\ . \tag{3.5}$$

b）ベーテ近似のパーコレーション[19)]

$$P^{(\text{Bethe})}=\overline{P}^{(\text{Bethe})}(p-p_c)\,;\quad \overline{P}^{(\text{Bethe})}=2z(z-1)/(z-2)\,,$$

$$S^{(\text{Bethe})}=\overline{S}^{(\text{Bethe})}/(p_c-p)\,;\quad \overline{S}^{(\text{Bethe})}=z/(z-1)^2\,,$$

$$p_c^{(\text{Bethe})}=1/(z-1)\,. \tag{3.6}$$

以上の結果に他の方法で求めた臨界濃度 p_c^* とを組み合わせると，CAMの一般論，すなわち，

$$\phi_\beta=\log\frac{\overline{P}^{(\text{Bethe})}}{\overline{P}^{(\text{mf})}}\Bigg/\log\frac{p_c^*-p_c^{(\text{mf})}}{p_c^*-p_c^{(\text{Bethe})}}\quad, \tag{3.7}$$

および

$$\phi_\gamma=\log\frac{\overline{S}^{(\text{Bethe})}}{\overline{S}^{(\text{mf})}}\Bigg/\log\frac{p_c^*-p_c^{(\text{mf})}}{p_c^*-p_c^{(\text{Bethe})}} \tag{3.8}$$

によって ϕ_β，ϕ_γ を評価することができる。今，$p_c^*(d=2,\ \text{Bond})=1/2$ (exact)，$p_c^*(d=3,\ \text{Bond})\simeq0.247\pm0.005$ (series)，$p_c^*(d=2,\ \text{Site})\simeq0.598\pm0.010$(series)，$p_c^*(d=3,\ \text{Site})\simeq0.307\pm0.01$ (series)を用いると，ボンドパーコレーションでは，次元 $d=2$ では，$\beta_p\simeq0$，$\gamma_p\simeq2.42$，$d=3$ では，$\beta_p\simeq0.58$，$\gamma_p\simeq1.68$ となり，サイトパーコレーションでは，$d=3$ で，$\beta_p\simeq0.177$，$\gamma_p\simeq2.345$ となり，もっともらしい結果が，上のような極めて簡単な近似でも得られる。

上の議論で，変数を $p-p_c$ でなく，p/p_c-1 等を用いると少し違った値が得られるが，クラスターを大きくしてやれば，どちらの変数を用いても同じ値に収束するものと期待される。大きなクラスターに対する系統的な研究は，近い将来に発表する予定である。

§ 4. 結　び

以上，簡単な場合についてCAM理論とスケーリング則について議論してきたが，この他にも，aggregation（DLA，…）やスピノーダル分解等への応用も計画中である。最後に，研究室の院生，香取真理，胡暁，伊藤伸泰君達の協力に感謝する。さらに高安さんご夫妻のパーコレーションの計算結果に関する議論にも感謝したい。

文　献

1) M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 4205; See also Phys. Lett. **116A** (1986) 375; and in *Quantum Field Theory*, ed. F. Mancini (North Holland, Amsterdam, 1986).

2) M. Suzuki, M. Katori and X. Hu: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3092, to be referred to as CAM I.

3) M. Katori and M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3113, to be referred to as CAM II, See also M. Suzuki and M. Katori: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 1.

4) X. Hu, M. Katori and M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3865, CAM III.

5) M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 87 (1986) 1.

6) 鈴木増雄，月刊フィジックス / Vol. 7 (1986) No. 2.

7) 鈴木増雄，素粒子論研究 Vol. 74 (1987) 3月号，No. 6.

8) P. Weiss: J. Phys. Radium **6** (1907) 661.

9) H. A. Bethe: Proc. Roy. Soc. **A150** (1935) 552.

10) M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **58** (1977) 1151.

11) S. F. Edwards and P. W. Anderson, J. Phys. F.: Metal Phys. **5** (1975) 965.

12) A. T. Ogielski and I. Morgenstern: Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 928; J. Appl. Phys. **57** (1985) 3382.

13) A. T. Ogielski: Phys. Rev. **32B** (1985) 7384.

14) R. N. Bhatt and A. P. Young: Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 924.

15) R. R. P. Singh and S. Chakravarty: Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 245. (高温展開の論文)

16) J. D. Reger and A. Zippelius, in press. (動的高温展開法を用いた論文)

17) 鈴木増雄，固体物理 Vol. 19 (1984) No. 7; Vol. 20 (1985) No. 1.
小口武彦，「スピングラスとは何か」(物理学最前線シリーズ8)共立.

18) S. Fujiki and S. Katsura: Prog. Theor. Phys. **65** (1981) 1130.

19) J. W. Essam, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 2 edited by C. Domb and M. S. Green, Academic Press 1972.

20) D. Stauffer: Phys. Rep. **54** (1979) 1–74.